**01.**

# نحدد الدوال الأصلية للدالة f

| رقم | دالة f | دوال الأصلية F للدالة f مع $c\in\mathbb{R}$ | حيز تعريفها |
|---|---|---|---|
| 1 | $f(x)=8x^7-12x^4-14x^3-6x+5$ | $F(x)=x^8-\frac{12}{5}x^4-\frac{7}{2}x^3-3x+5x+c$ | $\mathbb{R}$ |
| 2 | $f(x)=-4x^5+\frac{2}{x^2}+3$ | $F(x)=-\frac{2}{3}x^6-\frac{2}{x}+3x+c$ | $]0;+\infty[$ أو $]-\infty;0[$ |
| 3 | $f(x)=(x+8)^2+1$ <br> $=(x+8)'(x+8)^2+1$ | $F(x)=\frac{1}{3}(x+8)^3+3x+c$ | $\mathbb{R}$ |
| 4 | $f(x)=(11x+1)^5-2x$ <br> $=\frac{1}{11}(11x+1)'(11x+1)^5-2x$ | $F(x)=\frac{1}{11}\times\frac{1}{6}(11x+1)^6-x^2+c$ | $\mathbb{R}$ |
| 5 | $f(x)=(2x^3-9)^2+7x^2$ <br> $=4x^6-36x^3+81$ | $F(x)=\frac{4}{7}x^7-9x^4+81x+c$ | $\mathbb{R}$ |
| 6 | $f(x)=\frac{5}{\sqrt{x}}=\frac{5}{2}\times\frac{1}{2\sqrt{x}}$ | $F(x)=\frac{5}{2}\times\sqrt{x}+c$ | $]0;+\infty[$ |
| 7 | $f(x)=\frac{1}{\sqrt{2x+4}}=\frac{(2x+4)'}{2\times\sqrt{2x+4}}$ | $F(x)=\sqrt{2x+4}$ | $]-2;+\infty[$ |
| 8 | $f(x)=\frac{x^7}{\sqrt{x^8+1}}$ <br> $=\frac{1}{8}(x^8+1)'(x^8+1)^{-\frac{1}{2}}$ | $F(x)=\frac{1}{8}\times\frac{1}{-\frac{1}{2}+1}(x^8+1)^{-\frac{1}{2}+1}+c$ <br> $=\frac{1}{4}\sqrt{x^8+1}+c$ | $\mathbb{R}$ |
| 9 | $f(x)=\sqrt[4]{x}=x^{\frac{1}{4}}$ | $F(x)=\frac{1}{\frac{1}{4}+1}x^{\frac{1}{4}+1}+c$ <br> $=\frac{4}{5}\times\sqrt[4]{x^5}+c$ | $\mathbb{R}^+$ |
| 10 | $f(x)=\sqrt[3]{x^5}=x^{\frac{5}{3}}$ | $F(x)=\frac{1}{\frac{5}{3}+1}x^{\frac{5}{3}+1}+c$ <br> $=\frac{3}{8}\times\sqrt[3]{x^8}+c$ | $\mathbb{R}^+$ |
| 11 | $f(x)=\sqrt[3]{2x-8}$ <br> $=\frac{1}{2}(2x-8)'(2x-8)^3$ | $F(x)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}(2x-8)^4+c$ <br> $=\frac{1}{8}(2x-8)^4+c$ | $]4;+\infty[$ |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 12 | $f(x)=x^7.\sqrt{5x^8-7}$ <br> $=\frac{1}{5}\left(5x^8-7\right)'\left(5x^8-7\right)^{\frac{1}{2}}$ | $F(x)=\frac{1}{5}\frac{1}{\frac{1}{2}+1}\left(5x^8-7\right)^{\frac{1}{2}+1}+c$ <br> $=\frac{2}{15}\left(5x^8-7\right)^{\frac{3}{2}}+c$ <br> $=\frac{2}{15}\sqrt{\left(5x^8-7\right)^3}+c$ | |
| 13 | $f(x)=3\sin\left(7x+\frac{\pi}{4}\right)-5\cos\left(2x-\pi\right)$ | $F(x)=-\frac{3}{4}\cos\left(7x+\frac{\pi}{4}\right)-5\times\frac{1}{2}\sin\left(2x-\pi\right)+c$ | $\mathbb{R}$ |
| 14 | $f(x)=3x^4\sin x^5=3\times\frac{1}{5}\left(x^5\right)'\sin x^5$ | $F(x)=-3\times\frac{1}{5}\cos x^5+c$ | $\mathbb{R}$ |
| 15 | $f(x)=\frac{1}{\cos^2 x}=\left(\tan x\right)'$ | $F(x)=\tan x+c$ | $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ |
| 16 | $f(x)=\sin x\cos^3 x=-\left(\cos x\right)'\cos^3 x$ | $f(x)=-\frac{1}{4}\cos^4 x+c$ | $\mathbb{R}$ |
| 17 | $f(x)=\frac{2x-5}{\left(x^2-5x+6\right)^8}$ <br> $=\left(x^2-5x+6\right)'\left(x^2-5x+6\right)^8$ | $F(x)=\frac{1}{9}\left(x^2-5x+6\right)^9+c$ | $]3;+\infty[$ أو <br> $]2;3[$ أو <br> $]-\infty;2[$ |
| 18 | $f(x)=\frac{\sin x}{\cos^5 x}=-\left(\cos x\right)'\cos^{-5}x$ | $f(x)=-4\cos^{-4}x+c=\frac{-4}{\cos^4 x}+c$ | $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ |
| 19 | $f(x)=\frac{x^7-3x^2-5}{x^2}=x^5-3-\frac{5}{x^2}$ | $F(x)=\frac{1}{6}x^6-3X+\frac{5}{x}+c$ | $]0,+\infty[$ أو <br> $]-\infty;0[$ |

## .02

**.01** نحدد الدوال الأصلية لدالة التالية : $f(x)=\frac{x}{\sqrt{x-1}}$ .

لدينا:

$$f(x)=\frac{x}{\sqrt{x-1}}$$
$$=\frac{x-1+1}{\sqrt{x-1}}$$
$$=\frac{x-1}{\sqrt{x-1}}+\frac{1}{\sqrt{x-1}}$$
$$=\sqrt{x-1}+2\times\frac{(x-1)'}{2\sqrt{x-1}}$$
$$=(x-1)'(x-1)^{\frac{1}{2}}+2\times\frac{(x-1)'}{2\sqrt{x-1}}$$

و منه :

$$F(x)=\frac{1}{\frac{1}{2}+1}(x-1)^{\frac{1}{2}+1}+2\times\sqrt{x-1}+c$$
$$=\frac{2}{3}\sqrt{(x-1)^3}+2\times\sqrt{x-1}+c$$

خلاصة : الدوال الأصلية لدالة التالية : $f(x)=\frac{x}{\sqrt{x-1}}$ هي على شكل $F(x)=\frac{2}{3}\sqrt{(x-1)^3}+2\times\sqrt{x-1}+c$ .

## 03.

**01.** هل الدالتين $F(x)=\frac{1}{6}(3x+4)^2$ و $G(x)=\frac{3}{2}x^2+4x$ أصليتين لنفس الدالة $f(x)$ ؟

نعتبر $G(x)$ دالة أصلية ل $f(x)$

لدينا:

$F(x)=\frac{1}{6}(3x+4)^2=\frac{1}{6}(9x^2+24x+16)=\frac{3}{2}x^2+4x+\frac{4}{3}=G(x)+\frac{4}{3}$ ومنه $F(x)=G(x)$

ومنه : $F(x)=G(x)+\frac{4}{3}$ إذن $F(x)$ دالة أصلية ل $f(x)$ .

خلاصة : الدالتين $F(x)=\frac{1}{6}(3x+4)^2$ و $G(x)=\frac{3}{2}x^2+4x$ أصليتين لنفس الدالة $f(x)$

## 04.

**01.** $F$ دالة أصلية ل $f$ حدد $f(x)$ .

أ- $F(x)=3x^4-2x+5$ .

$F$ دالة أصلية ل $f$ و منه : $F'(x)=f(x)\Leftrightarrow(3x^4-2x+5)'=f(x)$

$$\Leftrightarrow 12x^3-2=f(x)$$

خلاصة : $f(x)=12x^3-2$ .

ب- $F(x)=-x+\frac{3}{x}$ .

$F$ دالة أصلية ل $f$ و منه : $F'(x)=f(x)\Leftrightarrow\left(-x+\frac{3}{x}\right)'=f(x)$

$$\Leftrightarrow -1-\frac{3}{x^2}=f(x)$$

خلاصة : $f(x)=-1-\frac{3}{x^2}$ .

ج- $F(x)=5\sqrt{x}-\frac{3}{\sqrt{x}}$ .

$F$ دالة أصلية ل $f$ و منه : $F'(x)=f(x)\Leftrightarrow\left(5\sqrt{x}-\frac{3}{\sqrt{x}}\right)'=f(x)$

$$\Leftrightarrow \frac{5}{2\sqrt{x}} - 3\times\left(-\frac{1}{2}\right)x^{-\frac{1}{2}-1} = f(x)$$

$$\Leftrightarrow \frac{5}{2\sqrt{x}} + \frac{3}{2}\times\frac{1}{\sqrt{x^3}} = f(x)$$

خلاصة : $f(x) = \frac{5}{2\sqrt{x}} + \frac{3}{2}\times\frac{1}{\sqrt{x^3}}$ .

د - $F(x) = 2\sin(3x) + 7\cos\left(5x+\frac{\pi}{3}\right)$ .

$F$ دالة أصلية ل $f$ و منه : $F'(x) = f(x) \Leftrightarrow \left(2\sin(3x) + 7\cos\left(5x+\frac{\pi}{3}\right)\right)' = f(x)$

$$\Leftrightarrow 6\cos(3x) - 35\sin\left(5x+\frac{\pi}{3}\right) = f(x)$$

خلاصة : $f(x) = 6\cos(3x) - 35\sin\left(5x+\frac{\pi}{3}\right)$ .

## 05.

**01.** لنعتبر الدالة العددية المعرفة على $]0,+\infty[$ ب : $G(x) = \frac{1}{4}x^2 - \frac{3}{x^2} - \frac{3}{5}$ . حدد الدالة الأصلية $F$ المعرفة على $]0,+\infty[$ و التي تنعدم في $-1$ .

الدوال الأصلية لدالة التالية : $f(x) = \frac{1}{4}x^2 - \frac{3}{x^2} - 7$ هي على شكل : $F(x) = \frac{1}{12}x^3 - \frac{3}{x} - 7x + c$

من جهة أخرى : $F(-1) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{12}(-1)^3 - \frac{3}{-1} - 7(-1) + c = 0$

$$\Leftrightarrow c = -\frac{119}{12}$$

و بالتالي : $F(x) = \frac{1}{12}x^3 - \frac{3}{x} - 7x - \frac{119}{12}$ .

خلاصة : حدد الدالة الأصلية $F$ المعرفة على $]0,+\infty[$ و التي تنعدم في $-1$ هي : $F(x) = \frac{1}{12}x^3 - \frac{3}{x} - 7x - \frac{119}{12}$ .

**02.** لنعتبر الدالة العددية المعرفة على $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ ب : $f(x) = \frac{1}{\cos^2 x} + \cos x$ . حدد الدالة الأصلية $F$ المعرفة على $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ و $F(0) = 1$ .

الدوال الأصلية لدالة التالية : $f(x) = \frac{1}{\cos^2 x} + \cos x$ هي على شكل : $F(x) = \tan x + \sin x + c$

من جهة أخرى : $F(0) = 1 \Leftrightarrow \tan 0 + \sin 0 + c = 1$

$$\Leftrightarrow c = 1$$

و بالتالي : $F(x) = \tan x + \sin x + 1$ .

خلاصة : حدد الدالة الأصلية $F$ المعرفة على $]0,+\infty[$ و التي تنعدم في $-1$ هي $F(x) = \tan x + \sin x + 1$ .

## 06.

**01.** نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$ ب : $f(x)=\dfrac{3x+4}{(x+1)^3}$ .

أ- نحدد a و b من $\mathbb{R}$ حيث: $f(x)=\dfrac{a}{(x+1)^2}+\dfrac{b}{(x+1)^3}$.

لدينا :

$$f(x)=\frac{a}{(x+1)^2}+\frac{b}{(x+1)^3}\Leftrightarrow\frac{3x+4}{(x+1)^3}=\frac{a(x+1)+b}{(x+1)^3}=\frac{ax+a+b}{(x+1)^3}$$

ومنه : $a=3$ و $a+b=4$ أي $a=3$ و $b=1$ .

خلاصة : $a=3$ و $b=1$ و $f(x)=\dfrac{3}{(x+1)^2}+\dfrac{1}{(x+1)^3}$

طريقة 2 :

لدينا :

$$f(x)=\frac{3x+4}{(x+1)^3}=\frac{3x+3+1}{(x+1)^3}=\frac{3x+3}{(x+1)^3}+\frac{1}{(x+1)^3}=\frac{3(x+1)}{(x+1)^3}+\frac{1}{(x+1)^3}=\frac{3}{(x+1)^2}+\frac{1}{(x+1)^3}$$

خلاصة : $a=3$ و $b=1$ و $f(x)=\dfrac{3}{(x+1)^2}+\dfrac{1}{(x+1)^3}$

أ- نستنتج دالة أصلية للدالة f على $]-1;+\infty[$ .

لدينا : $f(x)=\dfrac{3}{(x+1)^2}+\dfrac{1}{(x+1)^3}=3(x+1)'(x+1)^{-2}+(x+1)'(x+1)^{-3}$

إذن : دالة أصلية للدالة f على $]-1;+\infty[$ هي : $F(x)=-3(x+1)^{-1}-\dfrac{1}{2}(x+1)^{-2}=-\dfrac{3}{x+1}-\dfrac{1}{2(x+1)^2}$ .

خلاصة : دالة أصلية للدالة f على $]-1;+\infty[$ هي : $F(x)=-\dfrac{3}{x+1}-\dfrac{1}{2(x+1)^2}$

## 07.

**01.** لنعتبر الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ ب : $f(x)=\left(\sin^2 x-3\sin x+8\right)\cos x$ حدد الدالة الأصلية F المعرفة على $\mathbb{R}$ و $F\left(\dfrac{3\pi}{2}\right)=0$ .

نحدد الدالة الأصلية F المعرفة على $\mathbb{R}$ و $F\left(\dfrac{3\pi}{2}\right)=0$ .

لدينا :

$$f(x)=\left(\sin^2 x-3\sin x+8\right)\cos x$$
$$=\cos x\sin^2 x-3\cos x\sin x+8\cos x$$
$$=\left(\sin x\right)'\sin^2 x-3\left(\sin x\right)'\sin x+8\cos x$$

و منه : الدوال الأصلية لدالة f هي : $F(x)=\frac{1}{3}\sin^3 x-3\times\frac{1}{2}\sin^2 x+8\sin x+c$

من جهة أخرى : $F\left(\frac{3\pi}{2}\right)=0\Leftrightarrow\frac{1}{3}\sin^3\left(\frac{3\pi}{2}\right)-3\times\frac{1}{2}\sin^2\left(\frac{3\pi}{2}\right)+8\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right)+c=0$

$$\Leftrightarrow\frac{1}{3}(-1)^3-3\times\frac{1}{2}(-1)^2+8(-1)+c=0$$
$$\Leftrightarrow c=-\frac{59}{6}$$

ومنه : $F(x)=\frac{1}{3}\sin^3 x-3\times\frac{1}{2}\sin^2 x+8\sin x-\frac{59}{6}$

خلاصة : الدالة الأصلية للدالة f على $\mathbb{R}$ حيث : $F\left(\frac{3\pi}{2}\right)=0$ هي : $F(x)=\frac{1}{3}\sin^3 x-3\times\frac{1}{2}\sin^2 x+8\sin x-\frac{59}{6}$ .